

基于几何相关的 GPS 观测量随机误差模型的研究

周桃云^{1,2}, 廉保旺¹, 杨冬冬¹, 张怡¹, 蔡成林³

(1. 西北工业大学电子信息学院, 陕西 西安 710129;
2. 湖南人文科技学院信息学院, 湖南 娄底 417000; 3. 湘潭大学信息工程学院, 湖南 湘潭 411105)

摘要: 针对传统方法考虑随机误差影响因素不够全面的问题, 建立了一种更加真实的 GPS 观测量随机误差模型。该方法在几何相关功能模型中引入了误差修正项, 采用了一种以空间换时间的改进 LS-VCE 算法对模型进行求解, 采集了 2 组真实的 GPS 实测数据对模型进行性能评估, 并利用该模型解算了载波相位整周模糊度。实验结果表明, 所提方法在模型精度、模型求解复杂度及整周相位模糊度解算成功率等方面均优于传统方法。

关键词: 最小二乘方差分量估计; 随机误差模型; 几何相关模型; 整周模糊度解算

中图分类号: TN961

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2019188

Research on GPS geometry-based observational stochastic error model

ZHOU Taoyun^{1,2}, LIAN Baowang¹, YANG Dongdong¹, ZHANG Yi¹, CAI Chenglin³

1. School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China

2. School of Information, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi 417000, China

3. College of Information Engineering, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China

Abstract: Aiming at the problem of not enough influencing factors were considered in traditional methods, a much more realistic stochastic model was built. In which error corrections were introduced into the geometry-based function model, an improved least squares variance component estimation (LS-VCE) algorithm with space-for-time was used to solve the model, two sets of real GPS data were collected to evaluate the performance of the model, and with which the carrier phase integer ambiguity was solved. The experimental results show that the proposed methods are superior to the traditional methods in terms of model accuracy, model solution complexity and integer ambiguity resolution.

Key words: LS-VCE, stochastic error model, geometry-based observation model, IAR

1 引言

GPS 是一种可以实现测距和授时, 并能提供全天候、实时、高精度位置、速度及时间信息的导航系统。自 1978 年 2 月 22 日第一颗 GPS 卫星发射以

来, 历经 40 年的发展, GPS 的用途早已远远超出了最初的用途。目前, GPS 在精细农业、环境监测、交通运输、资源调查、灾害预报等多个领域得到广泛应用, 并对地球科学和大气科学等相关学科的研究起到了极大推动作用^[1]。

收稿日期: 2019-01-25; 修回日期: 2019-07-02

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.61301094, No.61771150); 国家重大科技专项基金资助项目 (No.GFZX0301040115); 湖南省科技创新计划基金资助项目 (No.2018GK2014, No.2018RS3089); 广西科技计划项目合同基金资助项目 (No.AB17129028); 湖南省教育厅科学研究基金资助项目 (No.18B458)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61301094, No.1771150), The National Science and Technology Major Projects of China (No.GFZX0301040115), The Science and Technology Innovation Plan of Hunan Province (No.2018GK2014, No.2018RS3089), The National Research and Development Contracts of Guangxi Province (No. AB17129028), The Scientific Research Fund of Hunan Provincial Education Department (No.18B458)

不论是单点定位技术还是差分定位技术, 目前大部分的应用和研究都是基于所有观测到的卫星拥有同样的观测误差, 在估计接收机位置时每个卫星观测量都拥有一样的权重, 而实际情况下由于大气环境的影响以及卫星仰角的变化, 不同卫星观测量的误差是不一样的^[2]。在高精度差分定位领域, 载波相位整周模糊度的解算是所有定位应用的基础, 真实有效的载波相位观测量随机误差模型能够提高整周模糊度的搜索成功率, 对高精度定位的应用具有重要意义。

GPS 的定位过程本质上是一个由观测量到参数估计的数据处理过程, 通过建立功能模型获得观测量与待估计量之间的数学关系, 通过建立随机误差模型获取观测量的随机误差特性, 并对估计结果做出评估, 最终达到参数估计和精度评定的目的。Gauss 在 1792 年提出的最小二乘 (LS, least-squares) 方法因其计算方便、思路简洁, 成为最为常用且最为重要的数据处理手段之一^[3]。为提高 LS 的可靠性并得到合理正确的观测量权比, 通常采用随机误差模型的后验估计, 即方差分量估计 (VCE, variance component estimation) 为观测量定权。Rao^[4]在 1971 年提出最小范数二次无偏估计 (MINQUE, minimum norm quadratic unbiased estimator), 该方法需要已知观测量随机误差模型的一阶矩和二阶矩。Koch^[5]在 1978 年提出最优不变二次无偏估计 (BIQUE, best invariant quadratic unbiased estimator), 在正态分布的前提下该方法需要已知观测量随机误差模型的高阶矩。Kubik^[6]在 1970 年提出极大似然估计 (MLE, maximum likelihood estimator)。Koch^[7]最早于 1987 年使用贝叶斯 (Bayes) 方法计算得到 VCE 及其置信区间。Teunissen^[8]在 1988 年提出的最小二乘方差分量估计方法 (LS-VCE, least-squares variance component estimation) 是近年来受到广泛研究和讨论的方差分量估计方法。LS-VCE 对观测量随机误差模型分布不做要求, 而是利用最小二乘原理对方差分量进行估计, 统一了功能模型和随机误差模型的估计准则^[9-11], 但 LS-VCE 并没有为方差分量估计提供一个完美的计算方法, 且计算量很大。

对于功能模型, Teunissen^[12-13]已经建立了一套权威的定位理论, 而随机误差模型尚未有可靠的理论方法。Wang 等^[14]利用 MINQUE 对 3 种基

本的观测量随机误差模型进行了估计, 但并没有考虑不同类型观测量的方差及其相关性。Teunissen 等^[15]对双频信号之间的相关性进行了研究, Hartinger 等^[16]建立了载波相位观测量与载噪比之间的模型, Wang 等^[17]对时间相关性进行建模之后使用 MINQUE 方法对随机误差模型进行估计, 并证明了更加真实的随机误差模型可以提高载波相位模糊度解算正确率。整周模糊度解算正确率取决于以下 3 个因素^[18]: 1) 观测方程的强度, 如功能模型; 2) 观测量的噪声特性, 如随机误差模型; 3) 整周模糊度解算方法的选择。

Amiri-Simkooei 等^[19-22]利用 LS-VCE 估计了短基线时间序列的噪声状况, 并同时考虑不同观测量的方差、协方差、卫星仰角相关性及观测量之间的时间相关性, 建立了基于几何无关功能模型的随机误差模型。但在采用 LS-VCE 算法对模型进行求解时并没有对 LS-VCE 算法进行优化, 工作量大。另外, Amiri-Simkooei 也没有考虑接收机时钟不同步引起的卫星位置误差对定位精度的影响。针对此问题, 本文主要研究决定整周模糊度解算正确率的第二个因素, 建立一种更加真实的随机误差模型并应用于整周模糊度的解算中, 以验证模型的有效性。其贡献主要包括: 1) 在几何相关功能模型中引入误差修正项, 以消除或削弱接收机钟差不同步引起的卫星位置误差; 2) 同时考虑不同观测量类型、不同卫星观测量、卫星仰角相关性及观测量时间相关性, 建立一种更加真实的随机误差模型; 3) 针对 LS-VCE 算法计算量大的问题, 提出一种以空间换时间的改进 LS-VCE 算法并求解随机误差模型; 4) 采集 2 组真实的 GPS 数据对所提方法进行性能评估; 5) 将本文所建立的随机误差模型应用于整周模糊度解算中, 并与 3 种常用随机误差模型进行比较, 验证该模型的可靠性和有效性。

2 改进的几何相关功能模型

几何相关功能模型是利用卫星与接收机之间的几何分布关系, 对卫星 i 到参考接收机 r 和用户接收机 u 的距离差值做出近似。一般认为这个距离差值是同一时刻对同一卫星进行观测得到的, 事实上由于 2 个接收机的钟差及卫星到 2 个接收机的传输延时不一致, 即使 2 个接收机给出了相同的历元时刻, 其所对应的信号发送时刻也是不一样的。

换句话说，2 个接收机在相同历元时刻得到的观测分别对应 2 个不同的卫星位置 $i(r)$ 和 $i(u)$ ，此情况下同时观测卫星 i 的接收机 r 和 u 的几何分布如图 1 所示。

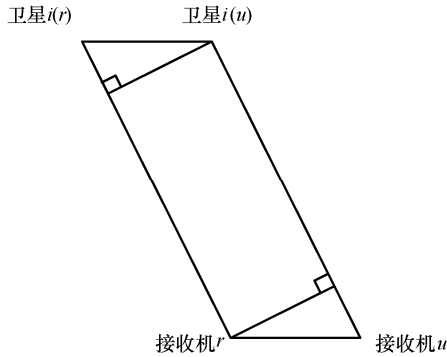


图 1 考虑不同接收机钟差后的距离单差模型

由于卫星和接收机之间的距离足够远，可以认为 r 到 $i(r)$ 的向量和 u 到 $i(u)$ 的向量平行。由 $i(r)$ 和 $i(u)$ 之间的位置差异引起的距离单差误差，可用 $i(r)$ 到 $i(u)$ 的向量在 r 到 $i(r)$ 向量的投影来近似表示。接收机 r 和 u 观测同一卫星 i 的单差可表示为

$$\begin{aligned} r_{ur}^{i(ur)} &= r_u^{i(u)} - r_r^{i(r)} = \\ &= -\mathbf{b}_{ur} \mathbf{I}_r^{i(r)} + \mathbf{b}^{i(ur)} \mathbf{I}_r^{i(r)} = \\ &= (-\mathbf{b}_{ur} + \mathbf{b}^{i(ur)}) \mathbf{I}_r^{i(r)} \end{aligned} \quad (1)$$

其中， \mathbf{b}_{ur} 为 r 指向 u 的基线向量， $\mathbf{b}^{i(ur)}$ 为 $i(r)$ 指向 $i(u)$ 的向量， $\mathbf{I}_r^{i(r)}$ 为 r 到 $i(r)$ 的单位向量。

同理，可计算接收机 r 和 u 观测同一卫星 j 的单差 $r_{ur}^{j(ur)}$ 及同时观测卫星 i 和 j 的双差。

$$\begin{aligned} r_{ur}^{i(ur)j(ur)} &= r_{ur}^{i(ur)} - r_{ur}^{j(ur)} = \\ &= (-\mathbf{b}_{ur} + \mathbf{b}^{i(ur)}) \mathbf{I}_r^{i(r)} - (-\mathbf{b}_{ur} + \mathbf{b}^{j(ur)}) \mathbf{I}_r^{j(r)} = \\ &= -(\mathbf{I}_r^{i(r)} - \mathbf{I}_r^{j(r)}) \mathbf{b}_{ur} + \mathbf{b}^{i(ur)} \mathbf{I}_r^{i(r)} - \mathbf{b}^{j(ur)} \mathbf{I}_r^{j(r)} \end{aligned} \quad (2)$$

若同时观测 m 颗卫星，并以第一颗卫星为参考，可得改进的伪距观测几何相关模型为

$$\begin{aligned} \rho_{ur}^{21} &= -(\mathbf{I}_r^{2(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)}) \mathbf{b}_{ur} + \mathbf{b}^{2(ur)} \mathbf{I}_r^{2(r)} - \mathbf{b}^{1(ur)} \mathbf{I}_r^{1(r)} \\ \rho_{ur}^{31} &= -(\mathbf{I}_r^{3(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)}) \mathbf{b}_{ur} + \mathbf{b}^{3(ur)} \mathbf{I}_r^{3(r)} - \mathbf{b}^{1(ur)} \mathbf{I}_r^{1(r)} \\ &\vdots \\ \rho_{ur}^{m1} &= -(\mathbf{I}_r^{m(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)}) \mathbf{b}_{ur} + \mathbf{b}^{m(ur)} \mathbf{I}_r^{m(r)} - \mathbf{b}^{1(ur)} \mathbf{I}_r^{1(r)} \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)对应的矩阵表达形式为

$$\begin{bmatrix} \rho_{ur}^{21} \\ \rho_{ur}^{31} \\ \vdots \\ \rho_{ur}^{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{I}_r^{2(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)}) \\ -(\mathbf{I}_r^{3(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)}) \\ \vdots \\ -(\mathbf{I}_r^{m(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)}) \end{bmatrix} \mathbf{b}_{ur} + \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} s_1 \quad (4)$$

其中， $s_i = \mathbf{b}^{i(ur)} \mathbf{I}_r^{i(r)}$ 表示因不同接收机对应卫星 i 的位置差异而产生的距离误差， $i = 1, \dots, m$ 。

改进的载波相位观测几何相关模型为

$$\begin{aligned} \phi_{ur}^{21} &= -(\mathbf{I}_r^{2(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)}) \mathbf{b}_{ur} + \mathbf{b}^{2(ur)} \mathbf{I}_r^{2(r)} - \mathbf{b}^{1(ur)} \mathbf{I}_r^{1(r)} + N_{ur}^{21} \lambda \\ \phi_{ur}^{31} &= -(\mathbf{I}_r^{3(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)}) \mathbf{b}_{ur} + \mathbf{b}^{3(ur)} \mathbf{I}_r^{3(r)} - \mathbf{b}^{1(ur)} \mathbf{I}_r^{1(r)} + N_{ur}^{31} \lambda \\ &\vdots \\ \phi_{ur}^{m1} &= -(\mathbf{I}_r^{m(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)}) \mathbf{b}_{ur} + \mathbf{b}^{m(ur)} \mathbf{I}_r^{m(r)} - \mathbf{b}^{1(ur)} \mathbf{I}_r^{1(r)} + N_{ur}^{m1} \lambda \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)对应的矩阵表达形式为

$$\begin{bmatrix} \phi_{ur}^{21} \\ \phi_{ur}^{31} \\ \vdots \\ \phi_{ur}^{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{I}_r^{2(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)})^T \\ -(\mathbf{I}_r^{3(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)})^T \\ \vdots \\ -(\mathbf{I}_r^{m(r)} - \mathbf{I}_r^{1(r)})^T \end{bmatrix} \mathbf{b}_{ur} + \begin{bmatrix} s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} s_1 + \begin{bmatrix} N_{ur}^{21} \\ N_{ur}^{31} \\ \vdots \\ N_{ur}^{m1} \end{bmatrix} \lambda \quad (6)$$

由式(4)和式(6)可知，改进的几何相关模型由于添加了误差改正项，能有效消除由差分时刻不同步导致的卫星位置误差。

3 GPS 观测随机误差模型

一个更加真实的随机误差模型应该包括观测量的方差、不同观测量之间的协方差、卫星仰角相关性及 GPS 观测的时间相关性等多个因素。本节在同时考虑以上 4 个因素的基础上建立了一种更加真实的观测随机误差模型。由于第 2 节已建立了几何相关功能模型，对由卫星信号发送时刻不同步引起的误差进行了消除，同时参考文献[19-20]，进行如下假设。

1) 忽略同一接收机同时观测到的多个卫星观测量之间的相关性。

2) 忽略接收机之间任意 2 个卫星观测量之间的相关性。

3) 用户接收机和参考接收机同时观测的同一卫星随机误差状况相同。

这些假设不一定是观测随机误差模型的真实情况，但简化模型中观测量方差比协方差在加权最小二乘中起着更重要的作用，是随机误差模型的主要信息。因此，本文建立的观测随机误差模型忽略了协方差分量，保留了全部方差分量。此时 GPS 观测随机误差模型可表示为

$$\mathbf{Q}_y = \mathbf{C} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{E} \quad (7)$$

其中, \otimes 表示克罗内克积, 矩阵 C 、 T 、 E 可分别表示为

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{\rho 1}^2 & \sigma_{\rho 1 \rho 2} & \sigma_{\rho 1 \phi 1} & \sigma_{\rho 1 \phi 2} \\ \sigma_{\rho 1 \rho 2} & \sigma_{\rho 2}^2 & \sigma_{\rho 2 \phi 1} & \sigma_{\rho 2 \phi 2} \\ \sigma_{\rho 1 \phi 1} & \sigma_{\rho 2 \phi 1} & \sigma_{\phi 1}^2 & \sigma_{\phi 1 \phi 2} \\ \sigma_{\rho 1 \phi 2} & \sigma_{\rho 2 \phi 2} & \sigma_{\phi 1 \phi 2} & \sigma_{\phi 2}^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$T = \begin{bmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \cdots & \tau_{n-1} \\ \tau_1 & \tau_0 & \cdots & \tau_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n-1} & \tau_{n-2} & \cdots & \tau_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$E = 2 \begin{bmatrix} \sigma_1^2 + \sigma_2^2 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2 \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 + \sigma_3^2 & \cdots & \sigma_1^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1^2 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^2 + \sigma_m^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

若同时跟踪载波信号 L_1 和 L_2 , 则有 4 种观测类型, 分别为伪距观测量 ρ_1 和 ρ_2 、载波相位观测量 ϕ_1 和 ϕ_2 。 C 为观测类型协方差矩阵, 主对角线和非主对角线元素分别表示 GPS 观测量的方差和协方差; T 为观测量的时间相关性协方差矩阵, 主对角线元素表示每个历元的自相关性, 理论上取值为 1; n 为观测历元数; m 阶矩阵 E 是伪距双差观测量, 表示与卫星仰角相关的观测量精度, 以与仰角 θ 正弦成反比的函数建模^[23], 即

$$\sigma_i^2(\theta) = \frac{a}{b + \sin \theta}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

其中, m 为观测的卫星数量, 并以第一颗卫星作为参考卫星; a 、 b 为模型参数。

4 随机误差模型的求解

4.1 LS-VCE 估计

考虑如式(12)所示的线性观测模型。

$$\begin{cases} E\{y\} = Ax \\ D\{y\} = Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k \end{cases} \quad (12)$$

其中, E 表示随机变量期望; D 表示随机变量协方差; y 为 $m \times 1$ 的观测量; A 为 $m \times n$ 阶观测方程矩阵; x 是 n 维待估计参数; 观测量协方差矩阵 Q_y 可分解成一系列因子矩阵的线性组合; Q_0 表示协方差矩阵中的已知部分; Q_k 是构成协方差矩阵的因子矩阵, 为已知项, $k=1, \dots, p$; σ_k 为待估计参数。

定义观测残差如式(13)所示。

$$e = y - Ax \quad (13)$$

给定对称正定权重矩阵 W , 根据加权最小二乘估计准则可得 x 的估计量为

$$\hat{x} = (A^T W A)^{-1} A^T W y \quad (14)$$

残差 e 的估计量为

$$\hat{e} = [I - A(A^T W A)^{-1} A^T W] y \quad (15)$$

记 $P_{\perp} = I - A(A^T W A)^{-1} A^T W$, 式(15)可简化为

$$\hat{e} = P_{\perp} y \quad (16)$$

同样, 根据加权最小二乘估计方法可得 σ_k 的估计量为

$$\hat{\sigma} = (A^T W A)^{-1} A^T W y \quad (17)$$

记 $N = A^T W A$, $z = A^T W y$, 则式(17)简化为

$$\hat{\sigma} = N^{-1} z \quad (18)$$

其中, N 中第 k 行第 l 列元素为

$$n_{kl} = \frac{1}{2} \text{tr}(Q_k Q_y^{-1} P_{\perp} Q_l Q_y^{-1} P_{\perp}) \quad (19)$$

向量 z 的第 k 个元素为

$$z_k = \frac{1}{2} \hat{e}^T Q_y^{-1} Q_k Q_y^{-1} \hat{e} - \frac{1}{2} \text{tr}(Q_k Q_y^{-1} P_{\perp} Q_0 Q_y^{-1} P_{\perp}) \quad (20)$$

$\hat{\sigma}$ 的协方差矩阵为

$$Q_{\hat{\sigma}} = N^{-1} \quad (21)$$

可见 $\hat{\sigma}$ 的估计不是一个简单的线性计算, 需要进行迭代求解, 基本的基于观测方程矩阵的 LS-VCE 迭代计算流程如算法 1 所示。

算法 1 基于观测方程矩阵的 LS-VCE 计算流程

输入 观测方程矩阵 A , 观测量 y , 因子矩阵 Q_k

初始化 方差分量迭代初始值 σ_{k0} , $k=1, \dots, p$, 迭代控制误差 ε , 迭代计数 $i=0$

迭代过程 在第 i 次循环中执行步骤 1)~步骤 5)。

1) 计算观测量协方差矩阵 $Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k$;

2) 计算最小二乘残留 $\hat{e} = P_{\perp} y$;

3) 计算矩阵 N 和向量 z ;

$$n_{kl} = \frac{1}{2} \text{tr}(Q_k Q_y^{-1} P_{\perp} Q_l Q_y^{-1} P_{\perp})$$

$$L_k = \frac{1}{2} \hat{e}^T Q_y^{-1} Q_k Q_y^{-1} \hat{e} - \frac{1}{2} \text{tr}(Q_k Q_y^{-1} P_{\perp} Q_0 Q_y^{-1} P_{\perp})$$

4) 计算新的方差分量估计量 $\hat{\sigma} = \sigma^{i+1} = N^{-1} z$;

5) $i=i+1$; 当 $\|\sigma^i - \sigma^{i-1}\|_{Q_y^{-1}} < \varepsilon$ 时, 迭代结束。

输出 最小二乘方差分量估计 $\hat{\sigma}$, 协方差矩阵 N^{-1} 。

注意到算法 1 中步骤 3) 描述的 N 为对称矩阵, 只需求解下三角或者上三角元素。另外, 在计算 N 和 z 的过程中频繁使用 $Q_k Q_y^{-1} P_{\perp}$, $\hat{e}^T Q_y^{-1}$ 和 $Q_y^{-1} \hat{e}$ 。为此, 本文提出了一种以空间换取时间的改进 LS-VCE 方法。

令 $R_k = Q_k Q_y^{-1} P_{\perp} (k=0, 1, \dots, p)$, $q_1 = \hat{e}^T Q_y^{-1}$, $q_2 = Q_y^{-1} \hat{e}$ 。提前计算 R_k 并缓存, 用于加速矩阵 N 和向量 z 的计算; 缓存 q_1 和 q_2 , 用于加速向量 z 的计算。由 N 的结构可知, 在 p 个 R_k 矩阵中, 任意一个矩阵 R_k 都需要和其他 $p-1$ 个矩阵进行乘法运算。利用一个 R_k 矩阵所占用的空间减少了 $p-2$ 次矩阵计算。同理, q_1 和 q_2 也分别是以一个矩阵的空间占用减少了 $p-2$ 次矩阵计算。

改进的基于观测方程矩阵的 LS-VCE 计算流程如算法 2 所示。

算法 2 改进的基于观测方程矩阵的 LS-VCE 计算流程

输入 观测方程矩阵 A , 观测量 y , 因子矩阵 Q_k

初始化 方差分量迭代初始值 σ_{k0} , $k=1, \dots, p$; 迭代控制误差 ε ; 迭代计数 $i=0$

迭代过程 在第 i 次循环中执行步骤 1)~步骤 6)。

1) 计算观测量协方差矩阵 $Q_y = Q_0 + \sum_{k=1}^p \sigma_k Q_k$;

2) 计算最小二乘残留 $\hat{e} = P_{\perp} y$;

3) 计算矩阵 R_k 和向量 q_1 、 q_2 ,

$$R_k = Q_k Q_y^{-1} P_{\perp}, \quad q_1 = \hat{e}^T Q_y^{-1}, \quad q_2 = Q_y^{-1} \hat{e}$$

4) 计算矩阵 N 和向量 z

$$n_{kl} = \frac{1}{2} \text{tr}(R_k R_l)$$

$$z_k = \frac{1}{2} q_1 Q_k q_2 - \frac{1}{2} \text{tr}(R_k R_0)$$

5) 计算新的方差分量估计量 $\hat{\sigma} = \sigma^{i+1} = N^{-1} z$;

6) $i=i+1$; 当 $\|\sigma^i - \sigma^{i-1}\|_{Q_y^{-1}} < \varepsilon$ 时, 迭代结束。

输出 最小二乘方差分量估计 $\hat{\sigma}$, 协方差矩阵 N^{-1} 。

4.2 随机误差模型的迭代分步求解

采用改进的 LS-VCE 算法对随机误差模型进行

求解需要以下 3 个步骤。

step1 估计式(7)中的矩阵 C 。参考文献[21]和文献[22]中, 忽略各观测量的时间相关性和卫星仰角相关性, 取 T 为 k 阶单位矩阵, E 可简化为

$$E = \sigma^2 \begin{bmatrix} 4 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 4 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 4 \end{bmatrix} \quad (22)$$

矩阵 C 中未知的方差和协方差分量采用改进的 LS-VCE 算法进行求解。

step2 考虑 GPS 卫星仰角相关性, 将 step1 估计得到的矩阵 C 代入随机误差模型, T 仍为 k 阶单位矩阵, 采用改进的 LS-VCE 算法求解矩阵 E 。

step3 根据前两步计算得到矩阵 C 和 E , 再利用改进的 LS-VCE 算法求解矩阵 T 。基于改进的 LS-VCE 算法的迭代分步求解流程如图 2 所示。

5 随机误差模型的性能评估

采用 2 两组实测 GPS 数据分别对几何相关功能模型、改进的 LS-VCE 算法及随机误差模型进行性能评估。第一组数据是 2017 年 8 月 23 日 07:00:00 开始采集的, 基线长度为 2.791 2 m 的 2 台接收机和芯星通 UR380 和 NetR9 的 GPS 数据; 第二组数据是 2018 年 1 月 13 日 00:00:00 开始采集的, 基线长度为 0 的接收机 Trimble BD970 的 GPS 数据。每组数据持续 24 h 同时跟踪 L_1 和 L_2 载波信号, 并同时获得载波相位观测量和伪距观测量。

5.1 几何相关功能模型性能评估

直接利用原始观测量得到的接收机伪距和载波相位观测量双差值如图 3 所示, 图 3(a)和图 3(c)分别为卫星 PRN14 和 PRN3 载波相位双差值和伪距双差值, 图 3(b)和图 3(d)分别为卫星 PRN14 和 PRN32 载波相位双差值和伪距双差值。

由图 3 可知, 载波相位观测量精度较高, PRN14 和 PRN3 的双差值在 ± 0.4 m 内波动, PRN14 和 PRN32 的双差值在 ± 0.3 m 内波动, 受差分不同步误差影响比较大。伪距观测量精度较低, PRN14 和 PRN3 的双差值在 ± 1.2 m 内波动, PRN14 和 PRN32 的双差值在 ± 0.9 m 内波动, 虽然也受到差分不同步误差的影响, 但在 1 ms 的接收机钟差差异范围内, 影响程度没有载波相位观测量显著。

改进的几何相关功能模型首先估算由接收机

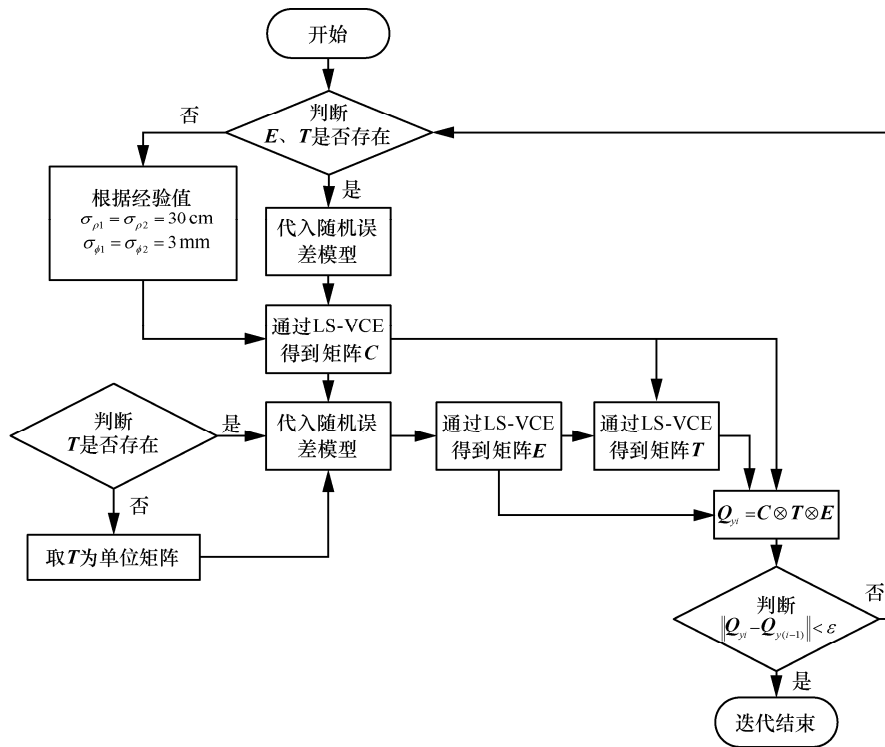


图 2 基于改进的 LS-VCE 算法的迭代求解流程

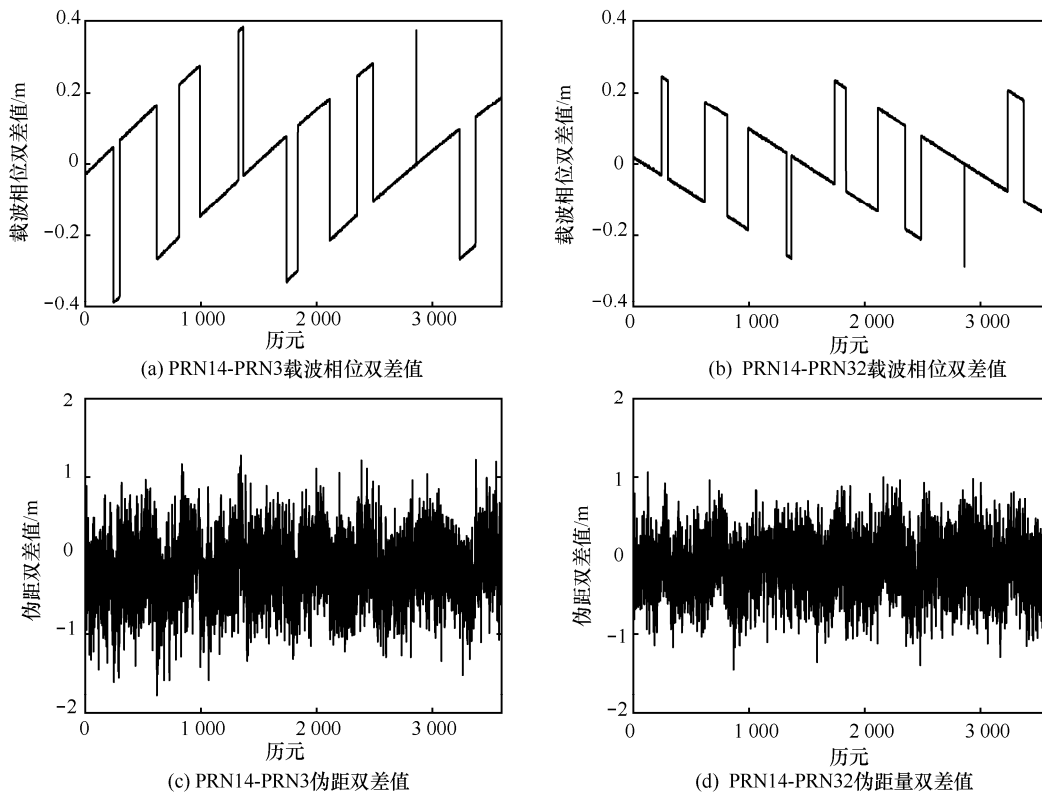


图 3 零基线 GPS 数据在 3 600 个历元内的观测量双差值

钟差不一致引起的差分不同步误差，再用该差分不同步误差校正伪距和载波相位观测量的双差值，校

正后观测量的双差值如图 4 所示。

由图 4 可知，改进的几何相关模型能较好地消

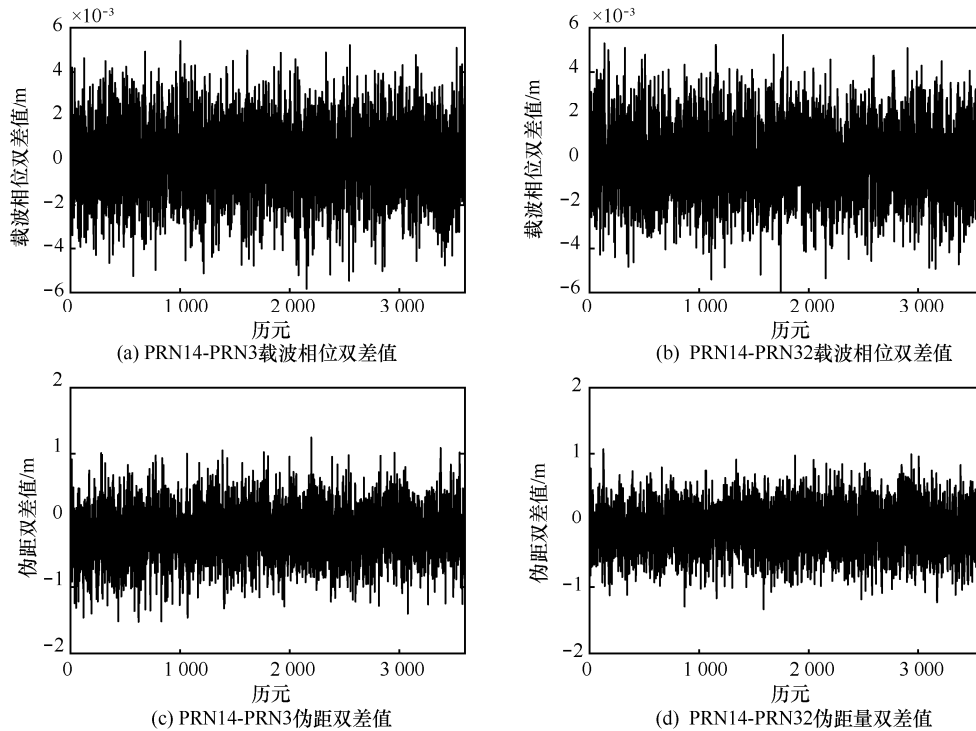


图 4 基于改进几何相关模型的零基线 GPS 数据在 3 600 个历元内的观测量双差值

除由差分不同步引起的误差，得到了零基线载波相位双差值应有的零期望随机噪声结果，PRN14 和 PRN3 及 PRN14 和 PRN32 的载波相位双差值均在 $\pm 4 \times 10^{-3}$ m 内波动，较矫正前精度提高了 2 个数量级，伪距观测值双差值也同样得到了校正，不过没有高精度的载波相位观测值得到的校正结果显著。

5.2 改进的 LS-VCE 算法效率评估

采取以空间换时间的思想，通过减少矩阵乘法和求逆运算对 LS-VCE 算法进行改进。为验证算法的性能，在相同的计算平台下对实验中 2 组数据的 500 个历元分别采用改进前后的 LS-VCE 算法进行数据处理，耗时情况如表 1 所示。

表 1 改进前后 LS-VCE 算法的耗时情况

基线长度/m	改进前/s	改进后/s	效率提高
2.791 2	546	165	69.8%
0	351	101	71.2%

由表 1 可知，改进后的 LS-VCE 算法其计算效率提高了 70% 左右，即改进的 LS-VCE 算法在不改变精度和无偏性要求的基础上大大提高了计算效率。

5.3 随机误差模型性能评估

根据式(7)所描述的随机误差模型，分别对观测数据进行估计。零基线数据由于没有外部误差干

扰，迭代结果与未迭代结果相差不大，因此这里主要对受外界干扰比较明显的短基线数据进行分析，以验证迭代分步求解方法在提高观测值随机误差模型参数估计精度上的有效性。

1) 不同观测值的方差估计。通过迭代分步求解得到的 4 种类型观测值的方差估计如表 2 所示。

由表 2 可知，零基线受外部环境误差的影响小，各类型观测值随机误差估计结果比短基线小且稳定。迭代求解后，短基线和零基线各类型观测值的方差估计更加准确稳定，伪距观测值的随机误差标准差都达到亚米级，载波相位观测值的随机误差标准差达到毫米级。

2) 不同观测值间的协方差估计。为更清楚地表述各观测类型之间的相关关系，将协方差分量转化为相关系数的形式，通过迭代分步求解法得到的协方差估计如表 3 所示。

由表 3 可知， L_1 和 L_2 的相位观测值存在较强的相关性，这是因为 2 个载波相位观测值精度与 2 个伪距观测值精度相差太大。在零基线情况下，除了 2 个载波相位之间的相关性很高之外，其他各观测类型之间都具有零均值的相关性。在短基线数据中，由于外部环境的干扰，观测值精度降低， L_1 和 L_2 所受的干扰也有差异，载波相位观测值的

表 2 迭代分步法得到的 4 种观测量方差估计

基线长度/m	观测量类型	标准差 (迭代后) /m	观测量方差	标准差 (迭代前) /m
2.791 2	L ₁ 伪距	0.291 2	0.089 7	0.294 2
	L ₁ 载波相位	0.002 2	4.982 2×10 ⁻⁶	0.001 7
	L ₂ 伪距	0.309 4	0.101 0	0.279 4
	L ₂ 载波相位	0.002 9	9.381 6×10 ⁻⁶	0.002 4
0	L ₁ 伪距	0.213 4	0.046 7	0.219 4
	L ₁ 载波相位	0.001 0	1.130 4×10 ⁻⁶	0.001 0
	L ₂ 伪距	0.188 4	0.036 2	0.179 9
	L ₂ 载波相位	0.001 3	1.824 9×10 ⁻⁶	0.001 3

表 3 迭代分步法得到的不同观测量协方差估计

基线长度/m	相关类型	相关系数 (迭代后)	协方差	相关系数 (迭代前)
2.791 2	L ₁ -L ₂ 伪距	0.102 2	0.0100	0.039 7
	L ₁ 伪距-L ₁ 相位	0.016 0	1.025 8×10 ⁻⁵	-0.001 9
	L ₂ 伪距-L ₁ 相位	-0.008 4	-6.255 2×10 ⁻⁶	-0.032 7
	L ₁ 伪距-L ₂ 相位	0.021 1	1.795 8×10 ⁻⁵	0.021 8
	L ₂ 伪距-L ₂ 相位	0.006 9	7.679 4×10 ⁻⁶	-0.007 5
	L ₁ -L ₂ 相位	0.665 2	4.539 3×10 ⁻⁶	0.300 2
0	L ₁ 伪距-L ₂ 伪距	0.122 8	0.0051	0.108 4
	L ₁ 伪距-L ₁ 相位	-0.005 7	-1.018 8×10 ⁻⁶	-0.003 9
	L ₂ 伪距-L ₁ 相位	-0.008 8	-1.775 4×10 ⁻⁶	-0.007 2
	L ₁ 伪距-L ₂ 相位	-0.007 5	-1.930 4×10 ⁻⁶	-0.007 1
	L ₂ 伪距-L ₂ 相位	-0.008 3	-2.067 1×10 ⁻⁶	-0.004 7
	L ₁ -L ₂ 相位	0.782 2	1.138 7×10 ⁻⁶	0.739 9

相关性降低，同时，由于存在对各观测类型一致的干扰，其他各观测类型的相关性有所增长，迭代后短基线数据中 L₁ 和 L₂ 的相位相关性明显增强。

3) 卫星仰角相关性估计。根据 PRN8、PRN10、PRN11 和 PRN13 这 4 颗卫星观测量方差随卫星仰角的变化情况，采用迭代分步法得到的短基线卫星仰角相关误差如图 5 所示。其中实线为全局拟合结果，即选取历元时段内所有卫星数据拟合结果，虚线对应卫星在选取历元时段内的拟合结果。

由图 5 可知，高仰角情况下卫星观测量方差较小，随着仰角减小，卫星观测量方差显著增大。短基线由于受接收机外部环境误差的干扰，卫星观测量方差有较大幅度的变化。迭代前后拟合出的各组实验数据仰角相关误差模型参数如表 4 所示。

由表 4 可知，迭代前两组数据的模型参数差

异较大，迭代后其差异明显减小。为进一步评估迭代后各类型观测量的方差估计，对短基线数据的载波相位与伪距标准差比值进行分析。短基线数据中 L₁ 和 L₂ 的相位和伪距观测量标准差比值如图 6 所示。

从图 6 中可以看出，迭代后各观测类型相对保持稳定，即迭代后的观测量随机误差模型更符合对整个模型的结构化设计。矩阵 **C** 从整体上反映各类型观测量的方差和相关性，矩阵 **E** 反映各个卫星观测量的方差，迭代求解的过程使 2 个矩阵能够更好地分离，每个矩阵的结果都更加准确。

4) 观测量时间相关性估计。取 5 个连续历元数据进行相关性分析，根据改进的 LS-VCE 算法获得 **C**、**E** 和 **T** 之后，采用迭代分步法得到的观测量时间相关性如表 5 所示。

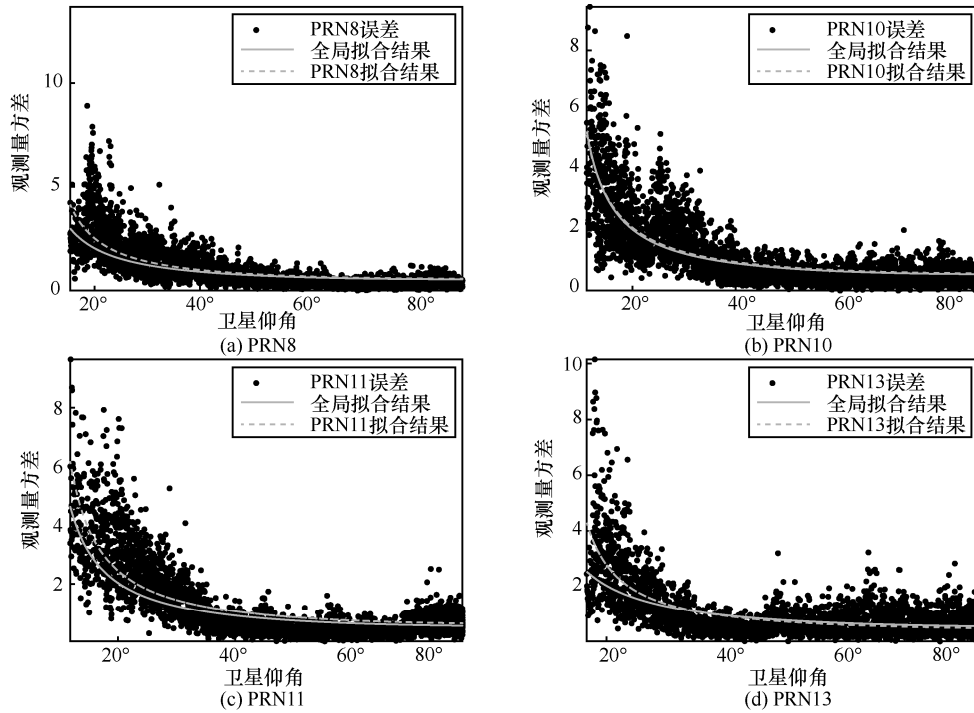


图 5 采用迭代分步法得到的 PRN8、PRN10、PRN11 和 PRN13 这 4 颗卫星短基线数据仰角相关误差

表 4 迭代前后仰角相关误差模型参数

基线长度/m	迭代前		迭代后	
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
2.791 2	0.563 9	-0.020 4	0.492 9	-0.099 9
0	0.746 2	0.215 4	0.605 1	0.072 8

表 5 迭代前后 GPS 观测量的时间相关性

基线长度/m	历元	相关系数 (迭代后)	时间相关性	相关系数 (迭代前)
2.791 2	1	1.000 0	0.051 4	1.000 0
	2	0.693 5	0.050 7	0.475 4
	3	0.683 2	0.050 9	0.462 0
	4	0.672 0	0.051 6	0.450 4
	5	0.658 4	0.054 8	0.437 1
0	1	1.000 0	0.016 4	1.000 0
	2	0.151 3	0.012 0	0.114 2
	3	0.116 4	0.014 0	0.084 7
	4	0.104 8	0.018 4	0.076 7
	5	0.100 3	0.032 3	0.073 0

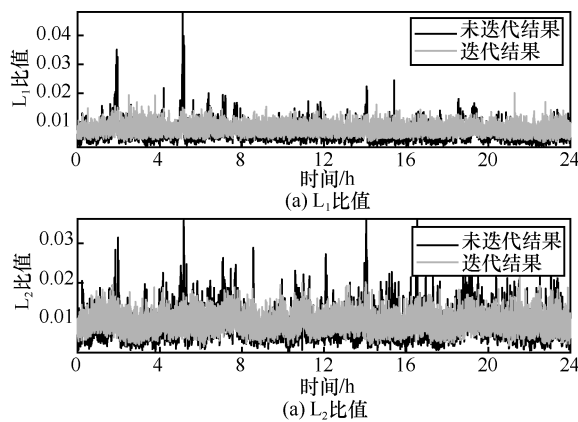


图 6 短基线数据载波相位与伪距标准差的比值

由表 5 可知, 2 组数据的时间相关性都随着时间间隔的增加而减小。迭代前零基线各历元数据之间几乎无关, 从第二个历元开始相关性就接近于 0。而短基线各历元数据由于多径效应等外界因素的影响, 时间相关性在 5 个历元之后还保持在 0.4 以上, 迭代后各观测量的时间相关性比迭代前高。

6 随机误差模型在整周模糊度解算中的应用

载波相位整周模糊度解算是高精度定位应用中的一个重要问题, 在整周模糊度解算过程中, 一般采用 LAMBDA 算法搜索最小二乘整数解时需要得到浮点解协方差矩阵, 而浮点解协方差矩阵是通过误差传播式由观测量协方差矩阵获得, 因此观测量的协方差矩阵, 即观测量随机误差模型对整周模糊度的解算有很大影响。本节将研究分析不同观测量随机误差模型对载波相位整周模糊度解算的影响。

根据观测量随机误差模型的准确度, 在整周模

糊度解算实验中将观测量随机误差模型分为 4 种。

模型 1 不考虑随机误差，假设各观测量具有相同的测量精度，观测量协方差矩阵为单位阵，不考虑各观测量之间的差异以及相关性。

模型 2 只考虑伪距观测量和载波相位观测量之间的差异，不考虑各观测量之间的相关性及观测量自身的差异和相关性。

模型 3 考虑不同观测量之间的差异，观测量随机误差模型采用式(11)所示的拟合函数。

模型 4 本文所建立的观测量随机误差模型，每 5 个历元为一个分组，假设 2 个相邻分组具有相同的随机误差模型，将前一分组的估计值作为后一分组中随机误差模型的初始值。

利用 4 种随机误差模型对短基线和零基线 24 h 的卫星观测数据进行载波相位整周模糊度解算实验，所有实验均采用单频单历元模糊度解算方法，得到整周模糊度解算正确率情况如表 6 所示。

由表 6 可知，在完全不考虑观测量随机误差模型的情况下，整周模糊度解算的正确率很低，最高只有 11.237%。将伪距和载波相位观测量的经验值代入随机误差模型后，整周模糊度解算的正确率得到极大提升，最高达到 99.785%，最低也有 84.033%。再将观测量卫星仰角相关模型引入随机误差模型，对观测量的估计更加准确，整周模糊度解算正确率

继续提高，最高达到 99.789%，最低也有 87.428%。本文所建模型的解算正确率比前 3 种都高，最高可达 99.847%，最低也有 92.549%。另外，在解算 L_1 时，模型 4 的成功率为 92.549%，略高于 Amiri-Simkooei^[18]的成功率 92.500%，在解算 L_2 时，模型 4 的成功率为 95.714%，与 Amiri-Simkooei^[18]的成功率 95.200%相比，高出 0.514%。

表 6 2 组数据整周模糊度正确率情况

数据类型	模型类型	短基线解算正确率	零基线解算正确率
L_1	1	1.252%	3.478%
	2	84.033%	98.949%
	3	87.428%	99.193%
	4	92.549%	99.629%
L_2	1	2.675%	11.237%
	2	91.602%	99.785%
	3	93.805%	99.789%
	4	95.714%	99.847%

实际应用常采用比例检测法确认整周模糊度，当比值大于某一阈值时最优整数解为正确解，否则为错误解。短基线和零基线 2 组数据在 4 种模型下的整周模糊度解算误报率和错检率情况分别如图 7 和图 8 所示。

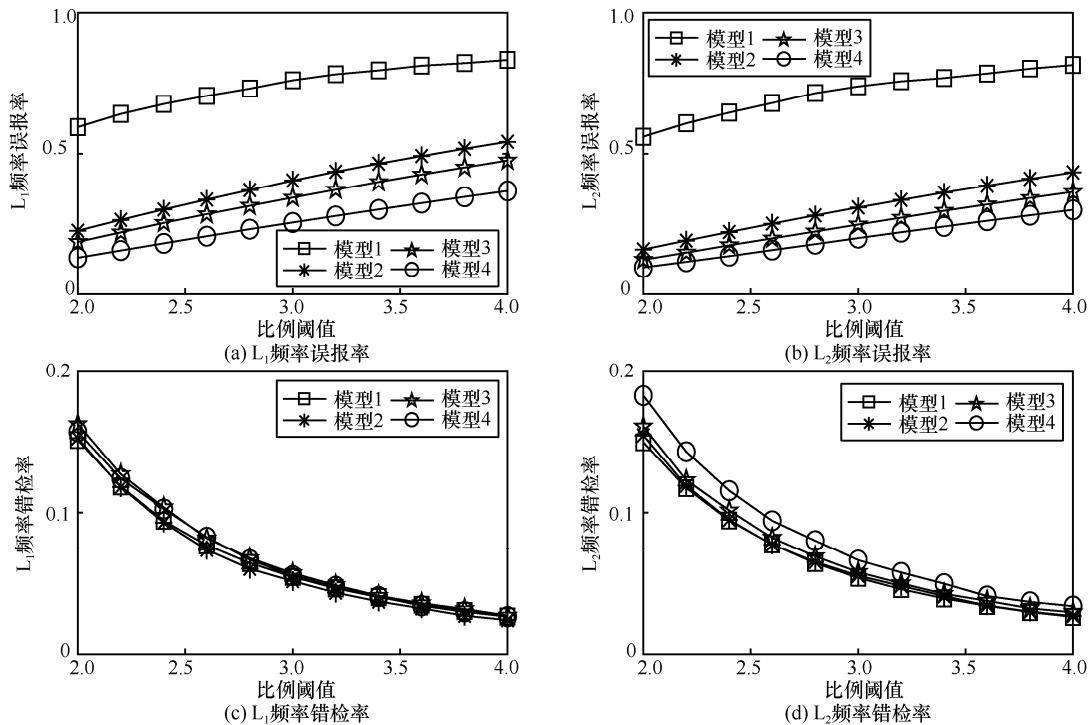


图 7 4 种模型下 L_1 、 L_2 短基线数据整周模糊度解算误报率和错检率

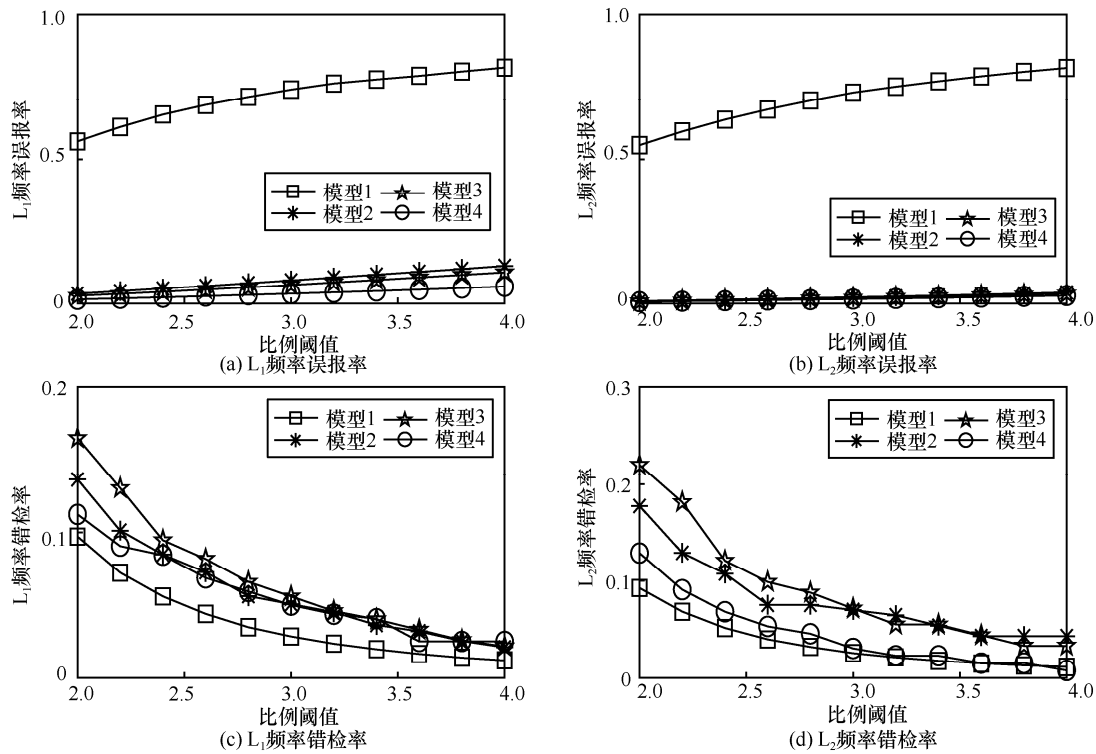


图 8 4 种模型下 L_1 、 L_2 零基线数据整周模糊度解算误报率和错检率

由图 7 可知,模型 4 的误报率最低且差异很小,模型 1 的误报率明显高于其他 3 种模型,即随机误差模型越准确,整周模糊度解算误报率越小。4 种模型在错检率方面的区别不大,由于模型 4 的整周模糊度错误数量比较少, L_2 频率中的错检率略高。由图 8 可知,对于零基线数据,模型 1 的误报率明显高于其他 3 种模型,模型 4 仍保持较低的误报率,在错检率方面 4 种模型没有明显的差异。

7 结束语

实际研究和应用中,随机误差模型考虑的因素越细致,越能反映观测量的真实误差状况。为此,本文研究了一种基于几何相关功能模型的观测量随机误差模型。首先,为消除或削弱接收机钟差不同步引起的卫星位置误差,在几何相关功能模型中引入误差修正项对几何相关功能模型进行改进,实验结果表明,改进后的双差观测量精度提高了 2 个数量级;其次,为降低 LS-VCE 算法的计算量,提出一种以空间换时间的改进的 LS-VCE 算法,实验结果表明,与传统的 LS-VCE 算法相比,改进后的 LS-VCE 算法在求解短基线和零基线随机误差模型时,其耗时分别节省了 69.8%和 71.2%;最后,利用 2 组真实的 GPS 数据对所建的随机误差模型进行

了性能评估,并采用该模型解算载波相位整周模糊度,实验结果表明,在解算 L_1 和 L_2 时,该模型的成功率均高于 Amiri-Simkooei 所提方法。

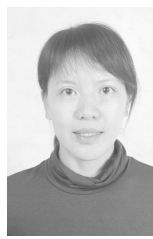
参考文献:

- [1] 冯威. GPS 中央差分定位系统理论与应用研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2013.
FENG W. Theory and applications of GPS central differential positioning system[D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2013.
- [2] AMIRI-SIMKOOEI A R, JAZAERI S, FARZANEH ZANGENEH-NEJAD F. Role of stochastic model on GPS integer ambiguity resolution success rate[J]. GPS Solution, 2016, 20(1):51-61.
- [3] 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础(第 3 版) [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2014.
Department of Surveying Adjustment, School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University. Theory of errors and basis of surveying adjustment (3rd Edition)[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2014.
- [4] RAO C R. Estimation of variance and covariance components-MINQUE theory[J]. Journal of Multivariate Analysis, 1971, 1(3):257-275.
- [5] KOCH K R. Schätzung von varianzkomponenten[J]. Allgemeine Vermessungs Nachrichten, 1978,85: 264-269.
- [6] KUBIK K. The estimation of the weights of measured quantities within the method of least squares[J]. Bulletin Géodésique, 1970, 95(1): 21-40.
- [7] KOCH K R. Bayesian inference for variance components[J]. Manuscripta Geodaetica, 1987, 12: 309-313.
- [8] TEUNISSEN P. Towards a least-squares framework for adjusting and

testing of both functional and stochastic models[R]. Delft University of Technology, 1988.

- [9] AMIRISIMKOOEI A R. Least-squares variance component estimation theory and GPS applications[D]. Netherlands: Delft University of Technology, 2007.
- [10] TEUNISSEN P J G, AMIRISIMKOOEI A R. Least-squares variance component estimation[J]. Journal of Geodesy, 2008,82(2):65-82.
- [11] AMIRISIMKOOEI A R. Application of least squares variance component estimation to errors-in -variables models[J]. Journal of Geodesy, 2013, 87 (10-12):935-944.
- [12] TEUNISSEN P J G. A canonical theory for short GPS baselines. Part III: the geometry of the ambiguity search space[J]. Journal of Geodesy, 1997, 71(8): 486-501.
- [13] TEUNISSEN P J G. A canonical theory for short GPS baselines. Part IV: precision versus reliability[J]. Journal of Geodesy, 1997, 71(9): 513-525.
- [14] WANG J, STEWART M P, TSAKIRI M. Stochastic modeling for static GPS baseline data processing[J]. Journal of Surveying Engineering, 1998, 124(4):171-181.
- [15] TEUNISSEN P J G, JONKAN N F, TIBERIUS C C J M. Weighting GPS dual frequency observations: bearing the cross of cross-correlation[J]. GPS Solutions, 1998,2(2):28-37.
- [16] HARTINGER H, BRUNNER F K. Variances of GPS phase observations: the sigma- \square model[J]. GPS Solutions, 1999,2(4):35-43.
- [17] WANG J, SATIRAPOD C, RIZOS C. Stochastic assessment of GPS carrier phase measurements for precise static relative positioning[J]. Journal of Geodesy, 2002,76(2):95-104.
- [18] AMIRI-SIMKOOEI A R, JAZAERI S, ZANGENEH-NEIAD F. Role of stochastic model on GPS integer ambiguity resolution success rate[J]. GPS Solutions, 2016, 20(1):51-61
- [19] AMIRI-SIMKOOEI A R, TIBERIUS C C J M. Assessing receiver noise using GPS short baseline time series[J]. GPS Solutions, 2007, 11(1): 21-35.
- [20] AMIRI-SIMKOOEI A R, TEUNISSEN P J G, TERIUS C C J M. Application of least-squares variance component estimation to GPS observables[J]. Journal of Surveying Engineering, 2009, 135 (4): 149-160.
- [21] AMIRI-SIMKOOEI A R, ZANGENEH-NEJAD F, ASGARI J. Least-squares variance component estimation applied to GPS geometry-based observation model[J]. Journal of Surveying Engineering, 2013,139(4):176-187.
- [22] ZANGENEH-NEJAD F, AMIRI-SIMKOOEI A R, SHARIFI M A. Recursive least squares with real time stochastic modeling: application to GPS relative positioning[J]. 2017, XLII-4/W4:531-536.
- [23] LI B F. Stochastic modeling of triple-frequency BeiDou signals: estimation, assessment and impact analysis[J]. Journal of Geodesy, 2016, 90(7): 593- 610.

[作者简介]



周桃云(1981-),女,湖南娄底人,西北工业大学博士生,主要研究方向为卫星导航与定位技术。



廉保旺(1962-),男,河南焦作人,博士,西北工业大学教授、博士生导师,主要研究方向为卫星通信导航与测控、室内定位技术、软件无线电技术、嵌入式系统设计。



杨冬冬(1994-),男,河南焦作人,西北工业大学硕士生,主要研究方向为卫星导航与定位技术。



张怡(1966-),女,陕西西安人,博士,西北工业大学教授、博士生导师,主要研究方向为通信、导航、遥测遥控系统的信息传输与处理、卫星导航与定位技术、无线通信与软件无线电。



蔡成林(1969-),男,湖南娄底人,博士,湘潭大学教授、博士生导师,主要研究方向为卫星导航与无线通信。